

שאלה 1 - סעיף 2

$$\frac{2x-6}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x^2-9} = 0$$

נפתור את המשוואה:

נפרק לגורמים את המכנים לפי נוסחאות הכפל המקוצר.

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2, \quad x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{(x-3)^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

הביטויים במשוואה מוגדרים לכל x ממשי המקיים: $x \neq \pm 3$.

נניח מעתה כי $x \neq \pm 3$.

נוציא גורם משותף במונה של השבר הראשון:

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{(x-3)^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

נצמצם:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

נכפיל בביטוי $(x+3)(x-3)$:

$$\Leftrightarrow \frac{2(x+3)(x-3)}{x-3} + \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} - \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3) + x - 3 - 1 = 0$$

נפתח סוגריים:

$$\Leftrightarrow 2x + 6 + x - 3 - 1 = 0$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow 3x = -2$$

נחלק ב-3:

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

לכן פתרון המשוואה הוא $x = -\frac{2}{3}$.

שאלה 1 - סעיף 3

$$\frac{-4}{x^2-25} + \frac{3}{(x+5)^2} = \frac{1}{-(x-5)^2}$$

נפתור את המשוואה:

הביטויים במשוואה מוגדרים לכל x ממשי המקיים: $x \neq \pm 5$.

נניח מעתה כי $x \neq \pm 5$.

לפי נוסחת כפל מקוצר, ולפי הזהות $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$:

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{(x+5)(x-5)} + \frac{3}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x-5)^2}$$

נכפיל בביטוי $(x+5)^2(x-5)^2$:

$$\Leftrightarrow -4(x+5)(x-5) + 3(x-5)^2 = -1 \cdot (x+5)^2$$

נפתח סוגריים:

$$\Leftrightarrow -4(x^2-25) + 3(x^2-10x+25) = -(x^2+10x+25)$$

נפתח סוגריים:

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 100 + 3x^2 - 30x + 75 = -x^2 - 10x - 25$$

נכנס איברים דומים באגף שמאל:

$$\Leftrightarrow -x^2 - 30x + 175 = -x^2 - 10x - 25$$

נוסיף x^2 לשני האגפים:

$$\Leftrightarrow -30x + 175 = -10x - 25$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow -20x = -200$$

נחלק ב-20:

$$\Leftrightarrow x = 10$$

לכן פתרון המשוואה הוא $x = 10$.

שאלה 1 - סעיף 7

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

נתבונן במשוואה:

לפי נוסחת השורשים:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

נפשט את הביטוי $\sqrt{12}$.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

לכן:

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot (-1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

נוציא גורם משותף במונה, 2:

$$\Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

נצמצם ב-2:

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \text{ או } x = -1 - \sqrt{3}$$

פתרונות המשוואה הם: $x = -1 + \sqrt{3}$ ו- $x = -1 - \sqrt{3}$.

פתרון משוואות מהצורה $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ($a \neq 0$)

נציג שתי דרכי פתרון:

$$ax + b\sqrt{x} + c = 0 \quad (1) \text{ נתונה המשוואה}$$

מהמשוואה נובע כי x הוא מספר אי-שלילי.

נגדיר $t = \sqrt{x}$ (ואז $t^2 = x$). גם t אינו יכול להיות מספר שלילי.

$$\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0 \quad \text{מתקבלת המשוואה:}$$

כעת נפתור את המשוואה הריבועית המתאימה, ואם יש לה פתרון (אי-שלילי), נחזור למשתנה המקורי x .

$$ax + b\sqrt{x} + c = 0 \quad (2) \text{ נתונה המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow b\sqrt{x} = -ax - c \quad \text{נעביר אגפים:}$$

מהמשוואה נובע כי x הוא מספר אי-שלילי.

אז נניח כי x הוא מספר אי-שלילי וכי הביטויים $b\sqrt{x}$ ו- $-ax - c$ הם בעלי סימן זהה, ונעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה:

$$\Leftrightarrow b^2(\sqrt{x})^2 = (-ax)^2 - 2(-ax)c + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x = a^2x^2 + 2acx + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0 \quad \text{נעביר אגפים:}$$

כעת נפתור את המשוואה הריבועית שקיבלנו.

ונבדוק שפתרונות המשוואה אכן מקיימים את התנאים לעיל.

דוגמאות

$$2x - 3\sqrt{x} - 5 = 0 \quad 1. \text{ נתונה המשוואה:}$$

נגדיר $t = \sqrt{x}$ (ואז $t^2 = x$). גם t אינו יכול להיות מספר שלילי.

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 5 = 0 \quad \text{מתקבלת המשוואה:}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ או } t = \frac{5}{2}$$

מבין הערכים האפשריים עבור t , $t = -1$ אינו אפשרי כי ערך x הוא מספר שלילי.

הערך $t = \frac{5}{2}$ הוא חיובי ולכן הוא האפשרות היחידה.

כעת נבטא את x באמצעות $t: x = t^2$, ולכן, $\Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

לסיכום, $\Leftrightarrow x = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

2. נתונה המשוואה: $5x - 2\sqrt{x} = 0$

נעביר אגפים: $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 5x$

מהמשוואה נובע כי x הוא מספר אי-שלילי.

אז נניח כי x הוא מספר אי-שלילי וכי הביטוי $5x$ הוא אי-שלילי (כי הביטוי $2\sqrt{x}$ הוא

אי-שלילי). ונעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה: $\Leftrightarrow (2\sqrt{x})^2 = (5x)^2$

$\Leftrightarrow 4x = 25x^2$

$\Leftrightarrow 25x^2 - 4x = 0$ נעביר אגפים:

$\Leftrightarrow x(25x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ או $x = \frac{4}{25}$

שני הפתרונות מקיימים את התנאים לעיל, והם הפתרונות של המשוואה.

* עוד דוגמה למשוואה, שלא מהצורה $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ($a \neq 0$), שניתן לפתור בעזרת הדרך השנייה:

3. נתונה המשוואה: $5x^2 - 2\sqrt{x} = 0$

נעביר אגפים: $\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 5x^2$

מהמשוואה נובע כי x הוא מספר אי-שלילי.

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה (שני האגפים אי-שליליים):

$\Leftrightarrow (2\sqrt{x})^2 = (5x^2)^2$

$\Leftrightarrow 4x = 25x^4$

$\Leftrightarrow 25x^4 - 4x = 0$ נעביר אגפים:

$\Leftrightarrow x(25x^3 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ או $x = \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

שני הפתרונות מקיימים את התנאים לעיל, והם הפתרונות של המשוואה.

שאלה 2 - סעיף 11

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$$

נפתור את המערכת:

נפתח סוגריים בשתי המשוואות:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 5 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 10 \end{cases}$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5 \end{cases}$$

נחסיר את המשוואה השנייה מהמשוואה הראשונה:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 5 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - (x^2 + y^2 - 2x - 4y) = 3 - 5$$

נפתח סוגריים:

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - x^2 - y^2 + 2x + 4y = -2$$

$$\Rightarrow 4x + 2y = -2$$

נכנס איברים דומים:

$$\Rightarrow 2x + y = -1$$

נחלק ב-2 את שני האגפים:

$$\Rightarrow y = -2x - 1$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = 3 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

ונקבל את המערכת השקולה:

נציב $y = -2x - 1$ במשוואה הראשונה:

$$\Rightarrow x^2 + (-2x - 1)^2 + 2x - 2(-2x - 1) = 3$$

נפתח סוגריים:

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 4x + 1 + 2x + 4x + 2 = 3$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 10x = 0$$

נכנס איברים דומים ונעביר אגפים:

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 0$$

נחלק ב-5 את שני האגפים:

$$\Rightarrow x(x + 2) = 0$$

נוציא גורם משותף x באגף שמאל:

$$\Rightarrow x = 0 \text{ או } x = -2$$

נציב $x = 0$ במשוואה $y = -2x - 1$ ונקבל:

$$\Rightarrow y = -2 \cdot 0 - 1 = -1$$

נציב $x = -2$ במשוואה $y = -2x - 1$ ונקבל:

$$\Rightarrow y = -2 \cdot (-2) - 1 = 3$$

לכן המערכת שקולה ל-:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

מכאן, למערכת יש שני פתרונות: $(0, -1)$ ו- $(-2, 3)$.

שאלה 2 - סעיף 12

$$\begin{cases} 8x^2 + 2y^2 - 5(2x + y) = -4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

(נשים לב כי לא ייתכן ש- $x = 0$ כי אז תתקבל משוואת סתירה) $xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$

נציב $y = \frac{2}{x}$ במשוואה הראשונה: $8x^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(2x + \frac{2}{x}\right) = -4$

$$\begin{aligned} 8x^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(2x + \frac{2}{x}\right) &= -4 \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 2 \cdot \frac{4}{x^2} - 5\left(2\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) &= -4 \\ \Leftrightarrow 8x^2 + \frac{8}{x^2} - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

נגדיר: $t = x + \frac{1}{x}$. מהגדרה זו נובע (לפי נוסחת הכפל המקוצר):

$$\begin{aligned} t^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \\ \Rightarrow t^2 &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{aligned}$$

לכן המשוואה $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ שקולה למשוואה: $4(t^2 - 2) - 5t + 2 = 0$

נפתור את המשוואה האחרונה:

$$\begin{aligned} 4(t^2 - 2) - 5t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 8 - 5t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 5t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3t - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t(t - 2) + 3(t - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2)(4t + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t - 2 = 0 \quad \text{או} \quad 4t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 2 \quad \text{או} \quad t = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

נחזור למשתנה x $(t = x + \frac{1}{x})$:

$$t = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 4 = -3x \Leftrightarrow 4x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 9 - 64 = -55 < 0$$

לכן למשוואה אין פתרון ממשי.

$$t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{נציב ב- } y = \frac{2}{x} : y = \frac{2}{1} = 2.$$

לסיכום, פתרון המערכת: $(1, 2)$.

דרך נוספת לפתרון (מאת ד"ר גיל אלון):

$$\begin{cases} 8x^2 + 2y^2 - 5(2x + y) = -4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

נגדיר $z = 2x$ (ואז $x = \frac{z}{2}$) ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} 8\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 2y^2 - 5(z + y) = -4 \\ \frac{z}{2} \cdot y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 + 2y^2 - 5(z + y) = -4 \\ zy = 4 \end{cases}$$

נכפיל את המשוואה השנייה ב-4:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 + 2y^2 - 5(z + y) = -4 \\ 4zy = 16 \end{cases}$$

נחבר את המשוואה השנייה לראשונה ונקבל:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 + 2y^2 - 5(z + y) + 4zy = -4 + 16 \\ 4zy = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 + 4zy + 2y^2 - 5(z + y) = 12 \\ 4zy = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(z^2 + 2zy + y^2) - 5(z + y) = 12 \\ 4zy = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(z + y)^2 - 5(z + y) = 12 \\ 4zy = 16 \end{cases}$$

נפתור את המשוואה הראשונה $2(z + y)^2 - 5(z + y) = 12$.

נגדיר $t = z + y$, ונפתור את המשוואה הריבועית המתקבלת $2t^2 - 5t = 12$.

פתרונות המשוואה הם $t = 4$, $t = -\frac{3}{2}$. ואז:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + y = 4 \\ zy = 4 \end{cases} \quad \text{או} \quad \begin{cases} z + y = -\frac{3}{2} \\ zy = 4 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת השמאלית הוא $\begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$. למערכת הימנית אין פתרון.

לכן

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

נחזור למשתנים המקוריים. $z = 2x$, לכן,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

לסיכום, פתרון המערכת: $(1, 2)$.